Ενώ αν: $\exists\ \delta, c > 0\ \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta): \dfrac{\|\bar{g}(\bar{u})\|}{|g(\bar{u})|} \leq c$

γράφουμε $\bar{g}(\bar{u}) = O(g(\bar{u}))$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

(<< μεγάλο όμικρον >> συμβολισμός Landau)

Με αυτόν τον συμβολισμό:

$\bar{f}$ διαφ/μη στο $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$ $\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{f}(\bar{x}) + D\bar{f}(\bar{x})\bar{u} + \bar{g}(\bar{u}) = O(\|\bar{u}\|)$ για $\bar{u} \to \bar{0}$

δηλ. $\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) = \bar{f}(\bar{x}) + D\bar{f}(\bar{x})\bar{u} + \bar{g}(\bar{u})$ με:

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{g}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

Καμπύλες

Ορισμός: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Μια απεικόνιση $\bar{\gamma}: I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, η οποία είναι συνεχής, ονομάζεται (παραμετρική) καμπύλη και η εικόνα της $\bar{\gamma}$, δηλ. $\bar{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^n$, ονομάζεται καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$

Παραδείγματα: $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\bar{j}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\bar{\gamma} \neq \bar{j}$ (ως απεικονίσεις)

αλλά $\bar{\gamma}[\mathbb{R}] = \bar{j}([0, 2\pi])$ (έχουν τις ίδιες εικόνες)

το $\bar{\gamma}(\mathbb{R}) = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r > 0$ στον $\mathbb{R}^2$

Η $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ονομάζεται και παραμετρικοποίηση του C

11/12/18

Παρατήρηση: Μια παραμετρικοποίηση μιας καμπύλης $C \subset \mathbb{R}^n$ δεν είναι μοναδική

Π.χ. (1) $\bar{j}(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
Έχει ως εικόνα τον ίδιο κύκλο $C \subset \mathbb{R}^2$ με την $\bar{\gamma}$, είναι δηλαδή η $\bar{j}$ μια αναπαραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}(\mathbb{R}) = C \subset \mathbb{R}^2$?

Επίσης και η $\bar{j}_2(t) = r(\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, \pi]$ παραμετρικοποιεί τον ίδιο κύκλο $C \subset \mathbb{R}^2$

(2) Έστω $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{a} \neq \bar{b}$, τότε η $\bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$ $t \in [0, 1]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $\bar{a}$ στο $\bar{b}$

(3) Αν $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, όπου ~~[illegible]~~ $I \subset \mathbb{R}$ αν $\bar{\gamma}(t) = (t, f(t))$ $t \in I$ είναι μια διάστατη, τότε η παραμετρικοποίηση του γραφήματος $\Gamma_f(I)$ της f

$$\bar{\gamma}(t) = \Gamma_f(t) = \{ \underbrace{(t, f(t))}_{= \bar{\gamma}(t)} : t \in Z \} \subset \mathbb{R}^2$$

Π.χ. για $f(t) = at$, $a > 0$, $t \in [0, 1]$ είναι το ευθύγραμμο $\bar{\gamma}(t) = (t, at) = t(1, a)$ τμήμα από το $(0,0)$ στο $(1, a)$

Η $\gamma: Z \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}$ διάστημα

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, ονομάζεται συνεχής στο $t \in I$, αν [η γ είναι διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής με πεδίο ορισμού $V = I \subset \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ($= \mathbb{R}^m$, $m = 1$)]

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap Z : \| \gamma(t) - \gamma(t_0) \| < \varepsilon$
(ή 2^{os} τρόπος)

$\Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, n$ οι συνιστώσες συναρτήσεις της γ, $\gamma_j \ Z \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $t_0 \in I$

$\overset{ή}{\Leftrightarrow} \forall j = 1, \ldots, n \ (\forall \varepsilon > 0) \ (\exists \delta > 0) \ (\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap Z)$
$: |\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)| < \varepsilon$

$\overset{ή}{\Leftrightarrow} \forall \underbrace{t_\nu}_{\in Z} \to t_0 : \gamma(t_\nu) \to \gamma(t_0) : |\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)| < \varepsilon$

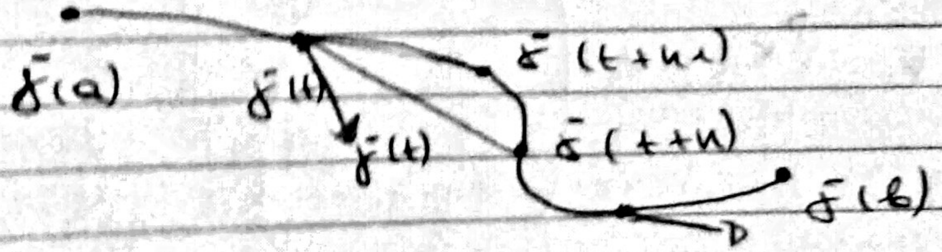
<u>Ορισμός</u>: Η (παραμετρική) καμπύλη $\gamma : Z \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται <u>διαφορίσιμη</u> στο $t \in Z$, αν υπάρχει η παράγωγος της στο $t \in Z$, $\gamma'(t) = D\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h} \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \end{pmatrix}$$

(Η $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ είναι ειδική περίπτωση ($m=1$) διανυσματικών συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$,
$\Rightarrow$ (ότι ισχύει γενικά, ισχύει ειδικά)

Η παράγωγος $\bar{\gamma}'(t)$ ονομάζεται εφαπτόμενο διάνυσμα της $\bar{\gamma}$ στο σημείο της $\bar{\gamma}(t)$

$\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$



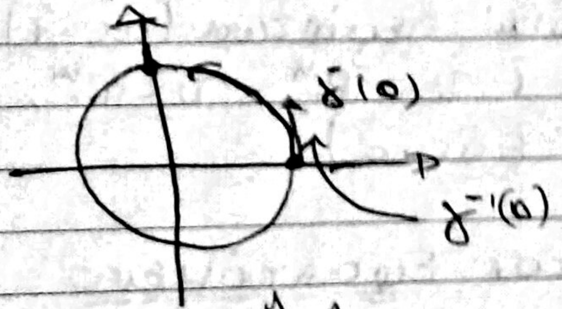
$\frac{\bar{\gamma}(t+h)-\bar{\gamma}(t)}{h}$ = το (ευθύγραμμο) τμήμα που διέτρεξε ένα σωματίδιο σε χρόνο h $\xrightarrow[h\to 0]{}$ «οριακά» η ταχύτητα του σωματιδίου στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$ της $\bar{\gamma}$, γι' αυτό το $\bar{\gamma}'(t)$ ονομάζεται και διάνυσμα ταχύτητας της $\bar{\gamma}$ στο $\bar{\gamma}(t)$

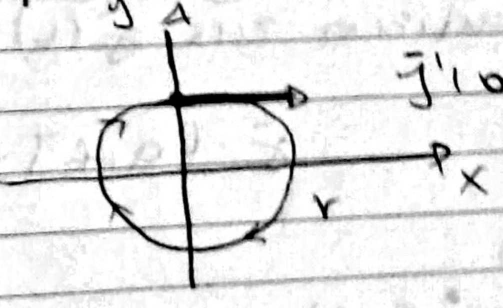
Παρατήρηση: Το εφαπτόμενο διάνυσμα εξαρτάται από την παραμετροποίηση της $\gamma(t) = c \subset \mathbb{R}^n$.

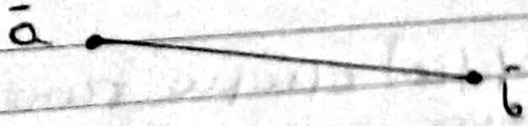
[$\|\gamma'(t)\|$ = ταχύτητα του σωματιδίου (ως βαθμωτό μέγεθος)

Παραδείγματα ① $\gamma(t) = r(\cos t, \sin t)$
$\Rightarrow \gamma'(t) = r(-\sin t, \cos t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma'(0) = r(0,1)$

$\bar{j}(t) = r(\sin t, \cos t)$,
$\bar{j}'(t) = r(\cos t, -\sin t)$



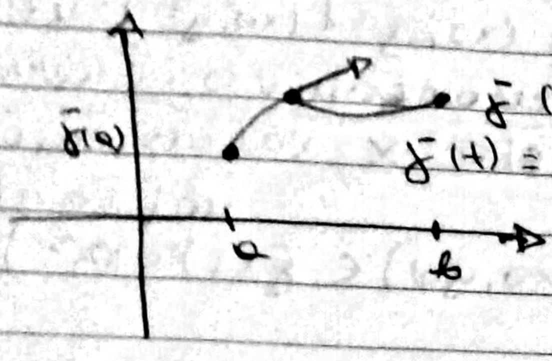


② 

$\gamma(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) \Rightarrow \gamma'(t) = \bar{b} - \bar{a} \quad t \in [0,1]$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ a_n + t(b_n - a_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$

(3) Έστω η $f: I \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη και $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in I$, $\Rightarrow \gamma'(t) = (1, f'(t))$, $t \in I = [a, b]$

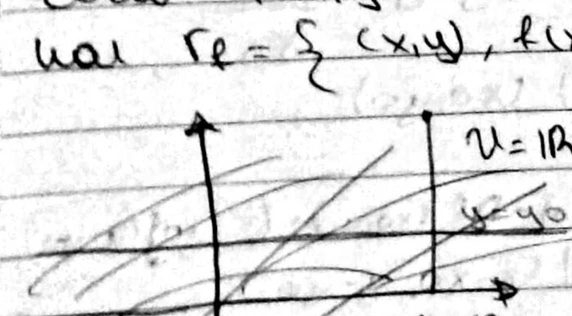


Παρατήρηση/ορολογία: Μια συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ (δηλ. $\forall t \in I$, $\exists \gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ (συμβ: C^1 – καμπύλη) και η $\gamma': I \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κανονική είναι συνεχής)

Ορισμός, συνέχεια διαφορισιμότητας παραμετρικών καμπύλων

Γεωμετρική ερμηνεία μερικών παραγώγων και της παραγώγου για $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, ανοικτό.

Έστω $f(x, y) \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in U$, η συνάρτηση $(x, y_0, f(x, y_0))$ και $\Gamma_f = \{(x, y), f(x, y) : (x, y) \in U\}$



Η αναλυτική εξίσωση του γραφήματος είναι $z = f(x, y)$, $(x, y) \in U$

Έστω $(x_0, y_0) \in U$

Η τομή του γραφήματος με το επίπεδο $y = y_0$ είναι η (∇) καμπύλη $\{(x, y_0, f(x, y_0)) : x \in \mathbb{R}$ με $(x, y_0) \in U\}$ $\gamma(x)$

η οποία έχει παράγωγο $\gamma'(x_0) = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$ στο $\to$

NO.
Date

σημείο $x=x_0$. Αυτό είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη αυτή. Αντίστοιχα, η τομή του γραφήματος με το επίπεδο $x=x_0$. Είναι η καμπύλη $\{(x_0,y,f(x_0,y)) : y\in\mathbb{R}$ με $(x_0,y)\in U\}\subset\mathbb{R}^3$ με εφαπτόμενο διάνυσμα $\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ (*) στο σημείο $x=x_0$ (της παραμ. καμπύλης)

(δηλ. στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in\gamma(I)\subset\mathbb{R}^3$)

(*) στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in\mathbb{R}^3$. Τα δύο αυτά εφαπτόμενα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν ένα επίπεδο, το οποίο (ΜΟΝΟ ΑΝ Η f ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ) ονομάζεται εφαπτόμενο επίπεδο (της επιφάνειας του γραφήματος της f στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (x-x_0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix} + (y-y_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

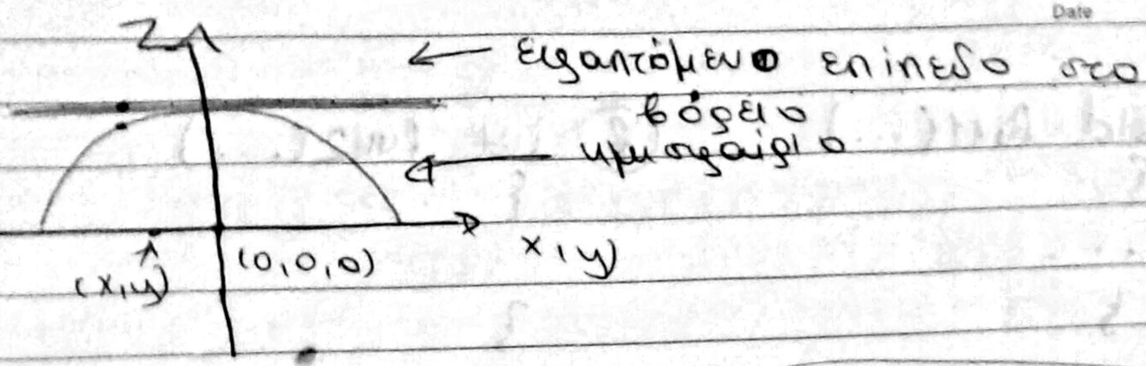
ΕΕ $z = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) =$

$= f(x_0,y_0) + \underbrace{\nabla f(x_0,y_0)}_{=Df(x_0,y_0)}\cdot(x-x_0,y-y_0)\ (x_0,y_0)$

συνέκρινε με $\lim_{(x-x_0,y-y_0)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-Df(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}$

$= 0$

$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})-Df(\vec{x})\cdot\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0$



Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$, και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\bar{x}$ στην κατεύθυνση $\bar{v}$ είναι η παράγωγος της πραγμ. συνάρτησης πραγμ. μεταβλητής, που προκύπτει αν περιορίσουμε την f στην ευθεία $\bar{x} + h\bar{v}$, $h \in \mathbb{R}$ και θεωρήσουμε την παράγωγο του περιορισμού:

$$F(h) := f(\bar{x}_0 + h\bar{v}) \in \mathbb{R} \text{ για } h = 0.$$

Άρα, η κατευθ. παραγ. $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}_0) \left(= F'(0)\right) =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{h}$$